PART4　群数列

例題

偶数の数列 2，4，6，8，…… を，第 n 群が n 個の偶数を含むように分ける。

$$2 \mid 4,\ 6 \mid 8,\ 10,\ 12 \mid 14,\ 16,\ 18,\ 20 \mid 22,\ \cdots\cdots$$

(1)　第 n 群の最後の偶数を求めよ。

(2)　第 n 群の最初の偶数を求めよ。

(3)　第 n 群に含まれる偶数の総和を求めよ。

Point Pickup

練習

奇数の数列 $1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \cdots\cdots$ を，第 n 群が $2n-1$ 個の奇数を含むように分ける。

$$1\ |\ 3,\ 5,\ 7\ |\ 9,\ 11,\ 13,\ 15,\ 17\ |\ 19,\ 21,\ 23,\ 25,\ 27,\ 29,\ 31\ |\ 33,\ \cdots\cdots$$

(1)　第 n 群の最後の奇数を求めよ。

(2)　第 n 群の最初の奇数を求めよ。

(3)　第 n 群に含まれる奇数の総和を求めよ。

第 3 講　PART4 確認問題

等差数列 1, 5, 9, 13, ……を，第 n 群が n 個の数を含むように分ける。

1 | 5, 9 | 13, 17, 21 | 25, 29, 33, 37 | 41, ……

1　第 n 群の最後の数は [ア] n^2 + [イ] n − [ウ] である。

2　第 n 群の最初の数は [エ] n^2 − [オ] n + [カ] である。

3　第 n 群に含まれる数の総和は

n([キ] n^2 − [ク]) である。

PART4　群数列

例題

偶数の数列 2，4，6，8，…… を，第 n 群が n 個の偶数を含むように分ける。

$$2 \mid 4,\ 6 \mid 8,\ 10,\ 12 \mid 14,\ 16,\ 18,\ 20 \mid 22,\ \cdots\cdots$$

(1)　第 n 群の最後の偶数を求めよ。　(2)　第 n 群の最初の偶数を求めよ。

(3)　第 n 群に含まれる偶数の総和を求めよ。

もとの数列の第 k 項は $2k$

(1)　第 1 群から第 n 群までに含まれる偶数の個数は

$$1+2+3+\cdots\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$$

よって，第 n 群の最後の偶数は，もとの数列の第 $\frac{1}{2}n(n+1)$ 項であるから

$$2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)=n(n+1)=n^2+n$$

(2)　$n\geqq 2$ のとき，第 $(n-1)$ 群の最後の偶数は，もとの数列の第 $\frac{1}{2}(n-1)n$ 項

よって，第 n 群の最初の偶数は，もとの数列の第 $\left\{\frac{1}{2}(n-1)n+1\right\}$ 項であるから

$$2\left\{\frac{1}{2}(n-1)n+1\right\}=(n-1)n+2=n^2-n+2$$

これは $n=1$ のときも成り立つ。

(3)　第 n 群は，初項 n^2-n+2，末項 n^2+n，項数 n の等差数列であるから，その総和は

$$\frac{1}{2}n\{(n^2-n+2)+(n^2+n)\}=\frac{1}{2}n(2n^2+2)=n(n^2+1)$$

練習

奇数の数列 1，3，5，7，…… を，第 n 群が $2n-1$ 個の奇数を含むように分ける。

1 | 3，5，7 | 9，11，13，15，17 | 19，21，23，25，27，29，31 | 33，……

(1)　第 n 群の最後の奇数を求めよ。　　(2)　第 n 群の最初の奇数を求めよ。

(3)　第 n 群に含まれる奇数の総和を求めよ。

もとの数列の第 k 項は $2k-1$

(1)　第 1 群から第 n 群までに含まれる奇数の個数は

$$1+3+5+\cdots\cdots+(2n-1)=\frac{1}{2}n\{1+(2n-1)\}=n^2$$

よって，第 n 群の最後の奇数は，もとの数列の第 n^2 項であるから

$2n^2-1$

(2)　$n \geqq 2$ のとき，第 $(n-1)$ 群の最後の奇数は，もとの数列の第 $(n-1)^2$ 項，

つまり第 n^2-2n+1 項

よって，第 n 群の最初の奇数は，もとの数列の第 $\{(n^2-2n+1)+1\}$ 項，

すなわち第 (n^2-2n+2) 項であるから

$$2(n^2-2n+2)-1=2n^2-4n+3$$

これは $n=1$ のときも成り立つ。

(3)　第 n 群は，初項 $2n^2-4n+3$，末項 $2n^2-1$，項数 $2n-1$ の等差数列であるから，その総和は

$$\frac{2n-1}{2}\{(2n^2-4n+3)+(2n^2-1)\}=\frac{2n-1}{2}(4n^2-4n+2)=(2n-1)(2n^2-2n+1)$$

第３講　PART4 確認問題 解答

1

[正解] ア：2，イ：2，ウ：3

[解説]

もとの数列の第 m 項は

$$1+(m-1)\cdot 4=4m-3$$

第１群から第 n 群までに含まれる数の個数は

$$1+2+3+\cdots\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$$ [A]

[A]　群の中の数の個数を加える。

よって，第 n 群の最後の数は，もとの数列の

第 $\frac{1}{2}n(n+1)$ 項

したがって，第 n 群の最後の数は

$$4\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}-3=\mathbf{2n^2+2n-3}$$

2

[正解] エ：2，オ：2，カ：1

[解説]

$n\geqq 2$ のとき，第 $(n-1)$ 群の最後の数は，もとの数列の

第 $\frac{1}{2}(n-1)n$ 項

よって，第 n 群の最初の数は，もとの数列の

第 $\frac{1}{2}(n-1)n+1$ 項 [B]

[B]　第 n 群の最初の数が，もとの数列の第何項であるかを調べる。

であり，これは $n=1$ のときも成り立つ。

したがって，第 n 群の最初の数は

$$4\left\{\frac{1}{2}(n-1)n+1\right\}-3=2(n-1)n+1$$

$$=\mathbf{2n^2-2n+1}$$

3 **[正解]** キ：2，ク：1

[解説]

第 n 群は，初項 $2n^2-2n+1$，末項 $2n^2+2n-3$，

項数 n の等差数列であるから，その総和は

$$\frac{1}{2}n\{(2n^2-2n+1)+(2n^2+2n-3)\}$$ [C]

$$=\frac{1}{2}n(4n^2-2)$$

$$=\boldsymbol{n(2n^2-1)}$$

[C]　初項 a，末項 l，項数 n の等差数列の和を S_n とすると

$$S_n=\frac{1}{2}n(a+l)$$